Notes didàctiques

Sobre el càlcul de límits i d'expressions radicals

JOAN GÓMEZ I URGELLÉS
Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica
EUP Vilanova i la Geltrú - UPC

A la nota del company Jordi Gas apareguda a **SCM/Notícies**/2 es feien unes observacions sobre el càlcul de certs límits.

Heus ací un altre exemple en què cal posar molta cura en el tractament del signe de l'infinit. En alguns llocs es dóna per vàlid el càlcul següent: $\lim\limits_{x\to 2} e^{\frac{3}{x-2}} = e^{\frac{3}{0}} = e^{\infty} = \infty$.

Per corregir l'errada i fer el càlcul correctament, cal pensar en el signe de l'infinit: $\lim\limits_{x\to 2^+} e^{\frac{3}{x-2}} = e^{\frac{3}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to 2^-} e^{\frac{3}{x-2}} = e^{\frac{3}{0^-}} = e^{-\infty} = 0$.

En la mateixa línia, trobem moltes explicacions (fins i tot en algun llibre de text!) en què manca rigor per fer bon ús de les hipòtesis que calen per aplicar certs resultats matemàtics, en aquest cas la igualtat $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Si l'apliquem reiteradament s'obté: $-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2^{\frac{6}{6}} = 2$. Aquesta igualtat pot fer entrar en contradicció més d'un estudiant de secundària si no li expliquem ben bé on és l'error: quina és la definició o fórmula que hem aplicat incorrectament?

Problemes

Agraïm al Sr. Miguel Amengual Covas per haver-nos informat que es poden trobar solucions dels problemes A1, A2 i de l'enunciat refinat de A3 (vegeu **SCM/Notícies**/2, **Solucions als problemes A1-A5**) en la traducció anglesa de la tercera edició russa del llibre *The USSR Olympiad Problem Book* (Dover Publications, Nova York), pàgines 142, 282-283 i 144-146, respectivament. Ensems aprofitem l'ocasió per dir que l'apartat de **Problemes proposats** de **SCM/Notícies** conté problemes que per regla general provenen de reculls al nostre abast: és fins on podem arribar amb les forces que tenim fins ara. Això no vol dir, és clar, que no esperem que cada vegada ens enviareu més problemes inèdits que ens permetin elevar el vigor de la secció de **Problemes**. Endemés, normalment no ens preocuparem, per als problemes proposats no inèdits, de citar les fonts d'on s'han extret, i només a l'apartat de solucions donarem la informació al nostre abast que considerem rellevant i pertinent.

Problemes proposats

A13. Determineu tots els enters $x, y \neq 0$ tals que

$$(x^2 + y)(x + y^2) = (x - y)^3.$$

A14. Els segments AD, BE i CF són les bisectrius interiors d'un triangle ABC amb D, E i F sobre els costats del triangle. Determineu els possibles valors de l'angle $\angle BAC$ si l'angle $\angle EDF$ és de $90°$.

A15. Sigui f una funció de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f(2) &= 3 \\ f(2n) &= f(n) \\ f(4n+1) &= 2f(n+1) - f(n) \\ f(4n+3) &= 3f(2n+1) - 2f(n). \end{aligned}$$

Determineu els nombre de nombres naturals entre 1 i 2000 fixos per aquesta funció.

Solucions dels problemes A6-A9

A6. Si $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5, \ldots$ és la successió de nombres de Fibonacci on $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $(n > 1)$, demostreu que tot nombre natural s'expressa de manera única com a suma de nombres de Fibonacci no consecutius (Teorema de Zeckendorf).

Solució (Redacció i Francesc Borrell, IB Salvador Espriu, Salt)

Existència: Donat un nombre n sempre trobarem un valor k_1 de manera que $F_{k_1} \leq n < F_{k_1+1}$. Podem escriure $n = F_{k_1} + m$. Llavors $0 \leq m < F_{k_1+1} - F_{k_1} = F_{k_1-1}$. Si $m = 0$, $n = F_{k_1}$ i hem acabat. Si no, $0 < m < F_{k_1-1}$, i per tant existeix un $k_2 < k_1$ de manera que $F_{k_2} \leq m < F_{k_2+1}$. Escrivint $m = F_{k_2}+p$, tornem a raonar com abans. Procedint d'aquesta manera arribarem a una successió finita $k_1 > k_2 > k_3 > \ldots$ tal que $n = F_{k_1}+F_{k_2}+F_{k_3}+\cdots$.

Unicitat: Si

$$n = F_{k_1} + F_{k_2} + F_{k_3} + \cdots + F_{k_r},$$

amb $k_1 > k_2 > k_3 > \ldots > k_r$, no consecutius, això implica que $F_{k_1} \leq n < F_{k_1+1}$, ja que el màxim valor de $F_{k_2} + F_{k_3} + \cdots + F_{k_r}$ es dóna quan $k_3 = k_2 - 2$, $k_4 = k_3 - 2$, etc. és a dir, per

$$F_{k_2} + F_{k_2-2} + \cdots + F_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2} = F_{k_2-1} - 1$$

sempre que $k_2 \geq 2$. En conseqüència, k_1 és proporcionat per l'algorisme descrit a la part de l'existència i, per tant, és únic.

A7. La mitjana de gols de penal fallats per un jugador de futbol (mediocre) és $0,334$. Quin és el mínim nombre de penals que ha llançat per poder treure aquesta mitjana?

Solució (Redacció). Busquem un nombre racional p/q dintre de l'interval $[0,3335, 0,3345)$ amb un denominador q que sigui el més petit possible. Tenint en compte el desenvolupament en fracció contínua regular de $0,3335$ i de $0,3345$:

$$0,3335 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{666}}}$$

i

$$0,3345 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{94 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}}}$$

el nombre que busquem ha de ser de la forma:

$$\frac{p}{q} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{k}}},$$

amb $94 < k \leq 666$. Si volem que q sigui el més petit possible, $k = 95$. La solució és, doncs, $96/287$. S'han d'haver xutat 287 penals com a mínim.

Altres idees. Antoni Gomà (IB Joanot Martorell, Esplugues de Llobregat) i Francesc Borrell fan un tractament directe del problema aprofitant el fet fàcilment visible que la segona reduïda de les fraccions continuades implicades al problema és $1/3$. No sembla fàcil, però, d'aplicar el seu mètode a d'altres valors de la dada inicial.

A8. Una marca de detergent ofereix, dintre els seus paquets, cupons numerats de l'1 al 5 i ofereix un premi si es presenten els cinc cupons diferents. A un cupó per paquet, quants paquets caldrà comprar, per terme mitjà, per aconseguir un premi?

Solució (Redacció). Si tenim una sèrie d'assaigs de Bernoulli amb probabilitat p d'èxit i $q = 1 - p$ de fracàs, és fàcil veure que el nombre d'experiments que cal dur a terme per tenir un primer èxit és, per terme mitjà, $1/p$. En efecte, si diem $p(i)$ a la probabilitat de tenir èxit a la i-èsima tirada, serà $p(1) = p$, $p(2) = qp, \ldots, p(i) = q^{i-1}p$, i la variable aleatòria que pren valor "el nombre de tirades fetes fins a obtenir èxit" té esperança

$$\sum_{n \geq 1} np(n) = p \sum_{n \geq 1} nq^{n-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Aplicant aquest resultat al nostre cas, podem dir que per aconseguir el primer cupó, només cal comprar una capsa. Per aconseguir el segon cupó, diferent del primer (probabilitat d'èxit, $4/5$), caldrà comprar, per terme mitjà, $5/4$ capses (tenint en compte l'observació d'abans.) De la mateixa manera, un cop ja tinguem dos cupons, per aconseguir un tercer cupó diferent dels dos que ja tenim (probabilitat d'èxit $3/5$), caldrà comprar per terme mitjà, $5/3$ capses i així succesivament. En definitiva, per tenir els 5 cupons diferents, ens caldrà comprar:

$$1 + \frac{5}{4} + \frac{5}{3} + \frac{5}{2} + \frac{5}{1} = 11.41\overline{6} \text{ capses}.$$

Aquest nombre es pot escriure:

$$5\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) = 5 \cdot H_5,$$

denotant amb H_n l'enèsim nombre harmònic:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Altres idees. F. Borrell i A. Gomà fan un càlcul directe de la probabilitat $p(n)$ de completar la sèrie amb n capses. El nombre de casos possibles és 5^n, i el nombre de casos favorables és

$$5\left(VR_4^{n-1}-\binom{4}{3}VR_3^{n-1}+\binom{4}{2}VR_2^{n-1}-\binom{4}{1}VR_1^{n-1}\right)$$

d'on resulta

$$p(n)=\frac{5\,(4^{n-1}-4\cdot 3^{n-1}+6\cdot 2^{n-1}-4)}{5^n}$$

i calculant la mitjana $\sum np(n)$ queda

$$E=\sum_{n\geq 5} n\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}-4\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}+6\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}-4\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right]$$

Sumant, com en el mètode precedent, aquestes progressions aritmetico-geomètriques, surt el mateix resultat.

Agenda

Conferència

Lloc: Universitat de les Illes Balears

Dia: 23 de novembre

Conferenciant: Dr. Ferran Hurtado, professor a la Universitat Politècnica de Catalunya

Títol: *Comprensió geomètrica i eficiència algorísmica.*

En el transcurs de l'acte, el Dr. Sebastià Xambó, president de la Societat Catalana de Matemàtiques, farà una exposició de les activitats i objectius de la SCM.

Sessió inaugural: 30/10

Amb motiu de l'edició de la biografia de Ferran Sunyer i Balaguer, que han patrocinat, conjuntament, la Societat Catalana d'Història de la Ciència i la Tècnica i la Societat Catalana de Matemàtiques, us convidem a la sessió inaugural del curs 1995-1996.

Dia: 30 de novembre de 1995.

Lloc: Sala Prat de la Riba, de l'Institut d'Estudis Catalans.

Hora: 7 de la tarda.

Introducció: Dr. Joan Cerdà, de la Universitat de Barcelona, presentarà l'obra matemàtica de Ferran Sunyer i Balaguer.

Conferència: Dr. Antoni Malet, de la Universitat Pompeu Fabra.

Títol: *Ferran Sunyer i Balaguer (1912-1967) i les matemàtiques després de la Guerra Civil.*